

2

Fundamentos de la mecánica de los materiales compuestos

Marco A. Pérez y Montserrat Sánchez

Resumen La naturaleza anisótropa y heterogénea de los materiales compuestos les confiere un comportamiento marcadamente diferente al de los materiales estructurales convencionales. Por ello, es conveniente conocer con detalle su comportamiento mecánico. En el presente capítulo se proporciona una visión general de la mecánica de los materiales compuestos, con un particular detenimiento en los laminados reforzados con fibras largas. El texto se estructura en torno a las tres escalas de análisis: la microescala, la mesoescala y la macroescala. En cada una de ellas se describen los procedimientos analíticos para la estimación de las propiedades elásticas y de resistencia. En conjunto, esta aportación constituye una aproximación inicial a la temática, donde se exponen los fundamentos básicos para afrontar futuras tareas de cálculo y diseño estructural con materiales compuestos.

2.1. Introducción

Un material compuesto consiste en la combinación a nivel macroscópico de dos o más componentes no solubles entre ellos que se unen sinérgicamente, obteniéndose un material con una mayor capacidad estructural que la de sus constituyentes cuando actúan por separado. La fase denominada refuerzo –la más rígida y resistente– es normalmente discontinua, y se presenta en forma de partículas o en forma de fibras continuas o discontinuas, largas o cortas, en una o varias direcciones, distribuidas uniforme o aleatoriamente. El refuerzo se halla embebido en un material continuo denominado matriz, que actúa como aglutinante, protector, y se encarga de repartir y transmitir las cargas al refuerzo [20]. Por consiguiente, las propiedades mecánicas del material compuesto dependerán esencialmente de las propiedades de los

Marco A. Pérez, Montserrat Sánchez

Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech, Colón 11, TR45, Terrassa, 08222 Barcelona, España

e-mail: marco.antonio.perez@upc.edu

DOI: [10.3926/oms.200](https://doi.org/10.3926/oms.200) • Omnia Publisher, 2014

materiales constituyentes, de su geometría, de su distribución y de su fracción volumétrica. Así, por ejemplo, la distribución topológica del refuerzo determina el grado de uniformidad u homogeneidad del material compuesto, y su geometría y orientación afecta al grado de anisotropía del sistema. Por lo general, el uso de partículas o fibras cortas originan materiales compuestos de bajo rendimiento, ya que el refuerzo solo proporciona una marcada rigidización y un incremento de la resistencia local, siendo la matriz el constituyente que gobierna las propiedades mecánicas globales del material. Esto se debe a la incapacidad –por debajo de una longitud crítica– de transmitir eficientemente los esfuerzos de la matriz al refuerzo. Por el contrario, cuando se requieren aplicaciones de altas prestaciones se recurre normalmente a láminas de fibras largas apiladas conformando un laminado.

Desde el punto de vista de la ingeniería estructural, los materiales compuestos ofrecen ventajas determinantes en comparación con los materiales estructurales convencionales, como –entre otras– la posibilidad de generar estructuras de geometrías complejas. La base de su superioridad estructural radica en sus altos módulos de rigidez y resistencia específica¹ y en la naturaleza heterogénea y anisótropa del material. Aunque a priori estas últimas características puedan verse como una desventaja, pues requieren de un análisis más complejo que el de los materiales monolíticos, isótropos y homogéneos convencionales, proporcionan una mayor libertad para un diseño y una configuración óptima del material estructural.

En las tareas de cálculo y diseño estructural es indudable la necesidad de conocer fehacientemente las propiedades mecánicas de los materiales utilizados. En el caso particular de los materiales compuestos, dada su naturaleza anisótropa y heterogénea, el número de variables es notablemente superior a los materiales convencionales. A día de hoy, los fabricantes raramente proporcionan el listado completo de variables, entre otros aspectos, por las dificultades intrínsecas que entrañan los ensayos experimentales para determinarlas. En las ocasiones en que el fabricante proporciona dichas variables, es conveniente conocer si dichas propiedades mecánicas han sido previamente minorizadas por un coeficiente de seguridad. Por todo ello, es necesario tener conocimiento de la mecánica de los materiales compuestos.

La naturaleza no homogénea de los materiales compuestos dicta tres escalas de análisis: la microescala, la mesoescala y la macroescala. La estimación de las propiedades mecánicas puede abordarse en cada una de estas escalas a partir de un enfoque analítico o experimental. No obstante, el enfoque empírico, en términos ingenieriles y económicos, no siempre es viable dependiendo de la escala de trabajo, por lo que se recurre a un procedimiento mixto y a herramientas de cálculo que permitan relacionar las propiedades a través de las diferentes escalas de análisis.

El presente capítulo constituye una introducción a la mecánica de materiales compuestos laminados, donde se presentan los fundamentos y los procedimientos de análisis para determinar su comportamiento elástico y estimar los límites de resistencia. El texto está articulado en torno a las tres escalas de análisis antes mencionadas. Como introducción, previamente se describen las relaciones generales de tensión-deformación y sus pertinentes simplificaciones en función del grado de anisotropía del material y las hipótesis sobre el estado tensional representativo de trabajo. A continuación se presentan los fundamentos del enfoque micro-mecánico, donde se evalúa la interacción mecánica entre los materiales constituyentes, con

¹Dícese de los ratios módulo de rigidez-densidad y resistencia-densidad, respectivamente.

el fin obtener una predicción de las propiedades elásticas e higrotérmicas del compuesto. Seguidamente se aborda el análisis de lámina, evaluando la rigidez en función del ángulo de orientación, la afectación higrotérmica y la estimación de su resistencia. El siguiente nivel corresponde al análisis del laminado, donde se presenta el procedimiento para obtener las ecuaciones constitutivas del laminado, se evalúa nuevamente la afectación higrotérmica y se discute sobre la estimación de su resistencia. Finalmente se presentan las conclusiones generales y se señalan varias de las líneas actuales y futuras de desarrollo.

2.2. Generalidades sobre las relaciones tensión-deformación

En un material compuesto reforzado con fibras (en adelante *FRP - Fibre Reinforced Polymer*), estas pueden estar orientadas en múltiples y arbitrarias direcciones. Dependiendo de su disposición, el material presenta comportamientos marcadamente diferenciados en sus respectivas direcciones. Así pues, de acuerdo con su comportamiento, los compuestos pueden caracterizarse como anisótropos, monoclónicos, ortotrópicos, transversalmente isótropos o isótropos. Las diferencias entre los diferentes comportamientos se reflejan en las respectivas relaciones tensión-deformación.

En el caso más general de un sólido continuo, el estado de tensión en un punto se representa mediante 9 componentes de tensión actuando en las caras de un elemento cúbico paralelas a los ejes cartesianos de un sistema de coordenadas de referencia x, y, z (véase Figura 2.1 izquierda).

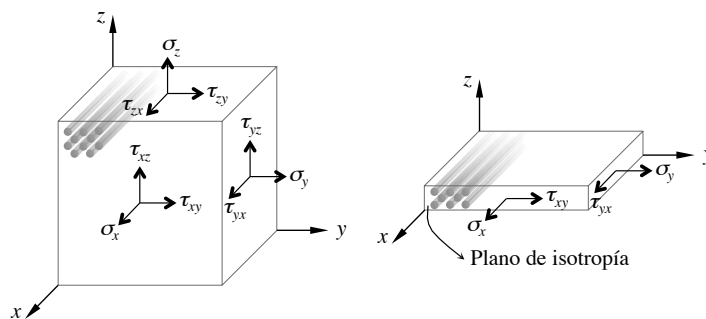


Figura 2.1: Tensiones actuando sobre un elemento de material reforzado con fibras en un estado de tensión triaxial (izquierda) y un estado de tensión plana (derecha).

Las componentes de tensiones y deformaciones bajo unas condiciones elásticas y lineales en la que el sólido padece pequeñas deformaciones, se relacionan mediante la Ley de Hooke generalizada [5]. Dada la simetría de los tensores de tensión y deformación, esto es $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ y $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, el número de componentes del tensor constitutivo de cuarto orden se reduce² de 81 a 36. Haciendo uso de la notación ingenieril, la relación tensión-deformación se expresa matricialmente como:

²Para obtener una descripción pormenorizada del procedimiento, se emplaza al lector a la consulta de, por ejemplo, el tercer capítulo de la referencia [6].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de rigidez, siendo su inversa de la matriz de flexibilidad \mathbf{S} , esto es $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}$. Consecuentemente, el estado de tensión o deformación en cada punto del sólido puede describirse mediante seis componentes, y su relación, en virtud de la simetría de las matrices de rigidez y flexibilidad (es decir $C_{ij} = C_{ji}$ y $S_{ij} = S_{ji}$), se expresa en términos de 21 constantes independientes³.

La ecuación 2.1 representa el caso más general de comportamiento elástico, correspondiendo a la relación de tensión-deformación de un material caracterizado como anisótropo, el cual no presenta planos de simetría respecto al alineamiento de las fibras. Cuando existe un plano de simetría el material se denomina monoclinico, en cuyo caso, siendo el plano paralelo al plano x - y definido en el sistema de coordenadas de referencia, sucede que los términos de la matriz de flexibilidad $S_{14} = S_{15} = S_{24} = S_{25} = S_{34} = S_{35} = S_{46} = S_{56} = 0$. Cuando existen tres planos de simetría mutuamente perpendiculares el material se denomina ortotrópico. Coincidiendo los planos de simetría con los planos del sistema de coordenadas de referencia, la relación deformación-tensión se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Tal y como se desprende de la observación de la ecuación anterior, el comportamiento puede ahora definirse mediante nueve constantes independientes. Véase también que las distorsiones angulares y las deformaciones longitudinales están desacopladas de las tensiones normales y las tensiones tangenciales, respectivamente. Además, no hay interacción entre las tensiones tangenciales y las distorsiones angulares en los diferentes planos.

El material denominado transversalmente isótropo es un caso particular de la ortotropía en el que uno de los planos principales de simetría es considerado como isótropo. Esta suposición es generalmente aplicada para el tratamiento de, por ejemplo, un compuesto reforzado unidireccionalmente, siendo el plano perpendicular a las fibras el plano de isotropía. Considerando el plano de simetría y - z como el plano de isotropía, la relación deformación-tensión se simplifica dado que los subíndices y y z de la matriz de flexibilidad son intercambiables. Consecuentemente, $S_{12} = S_{13}$, $S_{22} = S_{33}$, $S_{55} = S_{66}$ y $S_{44} = 2(S_{22} - S_{23})$, reduciéndose a 5 el número constantes independientes.

³Los coeficientes de ambas matrices están –como se verá– directamente relacionados con las constantes elásticas.

Finalmente, el comportamiento completamente isótropo del material se caracteriza por no haber una dirección de refuerzo preferente, de manera que cualquier plano es un plano de simetría y los ejes de coordenadas pueden elegirse arbitrariamente. Este sería el caso de un compuesto reforzado con fibras largas dispuestas aleatoriamente. En la relación deformación-tensión los subíndices x , y y z de la matriz de flexibilidad son ahora intercambiables, de manera que $S_{11} = S_{22} = S_{33}$, $S_{12} = S_{13} = S_{23}$ y $S_{44} = S_{55} = S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$, reduciéndose a 2 el número constantes independientes.

Una consideración importante en el estudio de los materiales compuestos, es la condición de tensión plana, cuya adopción se fundamenta en la manera en la que se emplean los *FRP* en diversas estructuras. Así, por ejemplo, estos materiales se utilizan en placas, vigas y otras formas estructurales que se caracterizan por tener como mínimo una de sus dimensiones geométricas uno o varios órdenes de magnitud inferior que las otras dimensiones. Esta característica permite simplificar el estado tensional asumiendo⁴ que $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = 0$ y $\tau_{xz} = 0$ (véase Figura 2.1 derecha). De este modo, la relación deformación-tensión para un material ortotrópico bajo un estado de tensión plana se expresa como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

A la matriz $S_{3 \times 3}$ en condiciones de tensión plana se la conoce como matriz de flexibilidad reducida. La matriz de rigidez C no admite sin embargo la simplificación directa eliminando las pertinentes filas y columnas. Por ello, la matriz de rigidez reducida $Q_{3 \times 3}$ se expresa como

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} & 0 \\ C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} & C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde C_{ij} son los coeficientes de la matriz de rigidez general C .

Es dable señalar que la condición de tensión plana no implica que la deformación ε_z sea nula; de la ecuación 2.2 se deduce que mientras $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, la deformación transversal es:

$$\varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y \quad (2.5)$$

Esta expresión permite determinar la deformación a través del espesor producida por las cargas en el plano.

2.3. Análisis en la microescala

Con el análisis del material compuesto a nivel micromecánico se pretende obtener una predicción de las propiedades elásticas e higrotérmicas globales del compuesto, a partir de las

⁴La suposición de un estado de tensión plana no es adecuada en problemas de uniones, en estructuras con rigidizadores o en secciones variables, entre otros [14].

propiedades, la disposición y el estudio de la interacción entre los materiales constituyentes⁵. El grado de precisión en la estimación de las propiedades y la respuesta del *FRP*, dependerá sustancialmente del enfoque y del grado de sofisticación del modelo utilizado. Existen básicamente tres enfoques diferenciados [14]:

- Modelos basados en la mecánica de materiales en los que se asume como hipótesis simplificadora un campo de tensiones y deformaciones uniforme en los constituyentes.
- Modelos basados en la teoría clásica de la elasticidad que proporcionan formulaciones de problemas acotados. Éstos requieren del uso de herramientas de métodos numéricos para la estimación de las tensiones y deformaciones a nivel micromecánico.
- Modelos empíricos basados en el ajuste de curvas de datos obtenidos experimentalmente.

En esta sección se presentan únicamente dos modelos basados en la mecánica de materiales: la regla de mezclas serie-paralelo y la regla de mezclas serie-paralelo modificada. Pese a su simplicidad, estos son enfoques intuitivos y de gran utilidad para introducir los conceptos básicos del análisis micromecánico [3, 4].

Asumiendo que existe una compactación perfecta entre fibra y matriz, se definen las fracciones volumétricas ${}^i v$, y las fracciones máscas ${}^i m$, como:

$${}^f v = \frac{{}^f V}{{}^c V} = \frac{{}^f M / {}^f \rho}{{}^c M / {}^c \rho} = \frac{{}^f M {}^c \rho}{{}^c M {}^f \rho} = {}^f m \frac{{}^c \rho}{{}^f \rho} \quad (2.6)$$

$${}^m v = \frac{{}^m V}{{}^c V} = \frac{{}^m M / {}^m \rho}{{}^c M / {}^c \rho} = \frac{{}^m M {}^c \rho}{{}^c M {}^m \rho} = {}^m m \frac{{}^c \rho}{{}^m \rho} \quad (2.7)$$

donde los superíndices ${}^f \diamond$, ${}^m \diamond$ y ${}^c \diamond$ denotan fibra, matriz y compuesto, respectivamente, siendo V el volumen, M la masa y ρ la densidad.

En lo sucesivo, las propiedades elásticas e higrotérmicas se determinan en base a las fracciones volumétricas de los materiales constituyentes. No obstante, en la práctica es útil disponer de una relación entre masas o densidades –parámetros fácilmente medibles– y la fracción volumétrica. Combinando las expresiones anteriores asumiendo que ${}^f v + {}^m v = 1$, se obtiene:

$${}^c \rho = {}^f v {}^f \rho + {}^m v {}^m \rho \implies \frac{1}{{}^c \rho} = \frac{{}^f m}{{}^f \rho} + \frac{{}^m m}{{}^m \rho}; \quad {}^f v = \frac{{}^c \rho - {}^m \rho}{{}^f \rho - {}^m \rho} \quad (2.8)$$

En los procedimientos de impregnación manual de la fibra es difícil conseguir una compactación perfecta, por lo que se advierte la aparición de huecos en el compuesto que pueden mermar su comportamiento estructural. La fracción volumétrica ${}^h v$ que ocupan estos huecos puede estimarse a partir de la ecuación:

$${}^f v + {}^m v + {}^h v = 1 \implies {}^h v = 1 - {}^c v \left(\frac{{}^f m}{{}^f \rho} + \frac{{}^m m}{{}^m \rho} \right) \quad (2.9)$$

⁵A partir del análisis micromecánico también pueden estimarse las propiedades de conductividad térmica y eléctrica, difusión y permeabilidad magnética, aunque su exposición queda fuera del alcance de este capítulo.

La denominada regla de mezclas serie-paralelo establece una condición de isodeformación en la dirección del refuerzo, ${}^c\varepsilon_1 = f\varepsilon_1 = m\varepsilon_1$, y una condición de isotensión en el resto de direcciones, ${}^c\sigma_2 = f\sigma_2 = m\sigma_2$, tal y como se ilustra en la Figura 2.2.

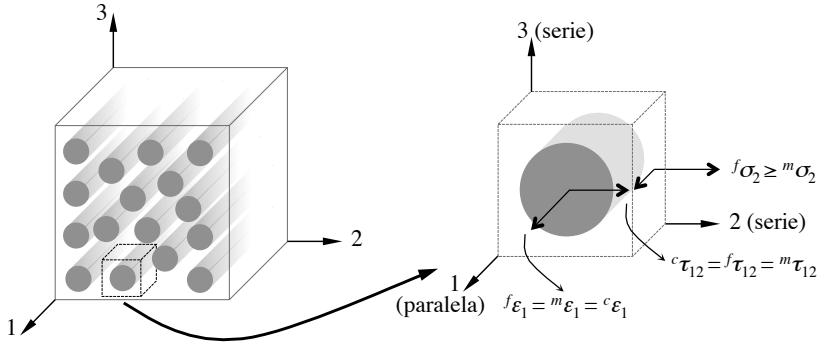


Figura 2.2: Representación del comportamiento serie-paralelo de los constituyentes del material compuesto. Se asume una condición de isodeformación en la dirección paralela y una condición de isotensión en la dirección serie.

Atendiendo al caso particular de un *FRP* con refuerzo unidireccional que no presenta defectos de compactación, en el que se considera que la fibra es ortótropa⁶ y la matriz isótropa, el módulo elástico⁷ longitudinal del compuesto cE_1 puede determinarse mediante:

$${}^cE_1 = f\nu fE_1 + m\nu mE = f\nu fE_1 + (1 - f\nu)mE \quad (2.10)$$

siendo fE_1 el módulo elástico longitudinal de la fibra y mE el modulo elástico de la matriz. Dependiendo de la fracción volumétrica y dada la diferencia en el orden de magnitud entre la rigidez del refuerzo y la rigidez de la matriz, se admite la eliminación del segundo término de la ecuación 2.10. Análogamente el coeficiente de Poisson longitudinal⁸ (mayor) ${}^c\nu_{12}$ se obtiene mediante:

$${}^c\nu_{12} = f\nu f\nu_{12} + m\nu m\nu \quad (2.11)$$

mientras que el coeficiente de Poisson transversal (menor) se obtiene de:

$$f\nu_{21} = fE_2 \frac{f\nu_{12}}{fE_1} \quad (2.12)$$

Véase como las propiedades del compuesto en la dirección longitudinal están gobernadas por las propiedades de la fibra de refuerzo. Por el contrario, en la dirección transversal (perpendicular a la dirección de las fibras), las propiedades están dominadas por las características de la matriz como se expone a continuación.

A partir de la condición de isotensión en la dirección serie se deduce la siguiente expresión para la estimación del módulo elástico transversal:

$$\frac{1}{{}^cE_2} = \frac{f\nu}{fE_2} + \frac{m\nu}{mE} \implies {}^cE_2 = \frac{fE_2 mE}{f\nu mE + (1 - f\nu) fE_2} \quad (2.13)$$

⁶Esta consideración dependerá del material de refuerzo; así, por ejemplo, mientras la fibra de vidrio es isótropa, la fibra de carbono presenta un comportamiento altamente ortótropo.

⁷Se considera que los módulos elásticos a tracción y compresión son iguales.

⁸Se define como $\nu_{12} \equiv -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Está demostrado que la aproximación anterior tiende a subestimar el valor del módulo elástico transversal [27], lo que obliga a replantearse la hipótesis de isotensión en los materiales constituyentes. Para ello se introduce un parámetro de corrección denominado factor de partición de tensiones, η_2 , en la dirección transversal, que permite diferenciar entre las tensiones medias que soporta la fibra, $^f\bar{\sigma}_2$, y la matriz, $^m\bar{\sigma}_2$, esto es:

$$\frac{1}{^cE_2} = \frac{^f\nu}{^fE_2} + \frac{\eta_2 ^m\nu}{^mE}; \quad 0 < \eta_2 = \frac{^m\bar{\sigma}_2}{^f\bar{\sigma}_2} < 1 \quad (2.14)$$

A la expresión anterior se la conoce como regla de mezclas serie-paralelo modificada para cE_2 . El factor η_2 es dependiente de la fracción volumétrica y debe ser determinado experimentalmente⁹.

Por otro lado, en la regla de mezclas serie-paralelo en dirección transversal, se está asumiendo que la deformación de la fibra puede ser independiente de la deformación de la matriz. Para restringir esta condición se introducen dos nuevos factores de partición de tensiones, $^f\eta$ y $^m\eta$, para cada material constituyente, llegando a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{^cE_2} = \frac{^f\eta ^f\nu}{^fE_2} + \frac{^m\eta ^m\nu}{^mE} \quad (2.15)$$

donde los factores se definen como

$$^f\eta = \frac{^fE_1 ^f\nu + \left[(1 - ^fv_{12} ^fv_{21}) ^mE + ^m\nu ^fv_{21} ^fE_1 \right] ^m\nu}{^fE_1 ^f\nu + ^mE ^m\nu} \quad (2.16)$$

$$^m\eta = \frac{\left[(1 - ^m\nu^2) ^fE_1 - (1 - ^m\nu ^fv_{12}) ^mE \right] ^f\nu + ^m\nu ^mE}{^fE_1 ^f\nu + ^mE ^m\nu} \quad (2.17)$$

La estimación del módulo de cizalladura $^cG_{12}$ en el plano es análoga a la del módulo elástico transversal cE_2 , considerando ahora una condición de isotensión a cizalladura, esto es:

$$^c\tau_{12} = ^f\tau_{12} = ^m\tau_{12} \quad (2.18)$$

de lo que se deduce la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{^cG_{12}} = \frac{^f\nu}{^fG_{12}} + \frac{^m\nu}{^mG} \implies ^cG_{12} = \frac{^fG_{12} ^mG}{^f\nu ^mG + (1 - ^f\nu) ^fG_{12}} \quad (2.19)$$

donde $^fG_{12}$ denota el módulo de cizalladura de la fibra y mG el módulo de cizalladura de la matriz considerada isótropa, siendo entonces válida la relación:

$$^mG = \frac{^mE}{2(1 + ^m\nu)} \quad (2.20)$$

⁹A modo de ejemplo, en la referencia [27], para $^f\nu = 0,7$ se utiliza un valor de $\eta_2 = 0,516$.

Análogamente al caso anterior, esta aproximación (ecuación 2.19) tiende a subestimar el valor del módulo elástico de cizalladura, siendo necesario introducir un parámetro de corrección denominado factor de partición de tensiones η_{12} , es decir:

$$\frac{1}{{}^cG_{12}} = \frac{{}^f\nu + \eta_{12} {}^m\nu}{{}^fG_{12} + \frac{{}^mG}{{}^f\tau_{12}}}; \quad 0 < \eta_{12} = \frac{{}^m\tau_{12}}{{}^f\tau_{12}} < 1 \quad (2.21)$$

donde el factor η_{12} es dependiente de la fracción volumétrica y debe determinarse experimentalmente¹⁰.

Para un caso particular en el que se asume una condición de isotropía de la fibra, puede emplearse de manera alternativa la siguiente relación deducida a partir de la teoría de la elasticidad [14]:

$${}^cG_{12} = {}^mG \left[\frac{({}^mG + {}^fG) - {}^f\nu ({}^mG - {}^fG)}{({}^mG + {}^fG) + {}^f\nu ({}^mG - {}^fG)} \right] \quad (2.22)$$

En lo referente a la estimación de los parámetros de resistencia, si bien se han publicado varios modelos, los resultados han demostrado ser menos precisos que las estimaciones de los parámetros de rigidez. No obstante, en el caso particular de la resistencia longitudinal a tracción ${}^c\sigma_1^T$ de un material reforzado unidireccionalmente, cuyo comportamiento está gobernado principalmente por las propiedades de la fibra, puede estimarse el parámetro de resistencia mediante

$${}^c\sigma_1^T = {}^f\nu {}^f\sigma_1^T + {}^m\nu \left({}^mE \frac{{}^f\sigma_1^T}{{}^fE_1} \right) \quad (2.23)$$

siendo ${}^f\sigma_1^T$ la tensión de rotura de la fibra. Nótese que se está considerando que se produce antes el fallo de la fibra que el de la matriz. La ecuación anterior admite una simplificación –conservativa– debido a que el segundo termino es generalmente muy inferior al primero.

En los casos de refuerzos con fibras continuas, por cuestiones prácticas, se ignora la contribución de la matriz a la rigidez y resistencia longitudinal, y se reemplaza la fracción volumétrica ${}^f\nu$ por la fracción de área de la fibra fa , resultando las siguientes expresiones simplificadas:

$${}^cE = {}^fa {}^fE \quad (2.24)$$

$${}^c\sigma = {}^fa {}^f\sigma^{ult} \quad (2.25)$$

Como se indicó anteriormente, a partir del mismo enfoque basado en la mecánica de materiales se pueden también derivar las expresiones para una primera estimación de las propiedades higrótérmicas del compuesto. Los coeficientes higritérmicos se utilizan para determinar las deformaciones inducidas por las cargas térmicas e higroscópicas. Paralelamente a los desarrollos anteriores, se obtienen las expresiones de los coeficientes de expansión por efectos de temperatura¹¹ del compuesto en la dirección longitudinal ${}^c\alpha_1$, y transversal ${}^c\alpha_2$, expresados como:

$${}^c\alpha_1 = \frac{{}^f\nu {}^fE_1 {}^f\alpha_1 + {}^m\nu {}^mE {}^m\alpha}{{}^f\nu {}^fE_1 + {}^m\nu {}^mE} \quad (2.26)$$

¹⁰A modo de ejemplo, en la referencia [14] se propone un valor de $\eta_{12} = 0,6$, mientras que en [27] se utiliza un valor de $\eta_{12} = 0,316$.

¹¹Se define como $\alpha_i \equiv \frac{\epsilon_i^T}{\Delta T}$, siendo ΔT el incremento de temperatura.

$$\begin{aligned} {}^c\alpha_2 &= \left[{}^f\alpha_2 - \left(\frac{{}^mE}{{}^cE_1} \right) {}^fv_{12} ({}^m\alpha - {}^f\alpha_1) {}^mv \right] {}^fv + \left[{}^m\alpha - \left(\frac{{}^fE_1}{{}^cE_1} \right) {}^mv ({}^m\alpha - {}^f\alpha_1) {}^fv \right] {}^mv = \\ &= {}^m\alpha + ({}^f\alpha_2 - {}^m\alpha) {}^fv + \left(\frac{{}^fE_1 {}^mv - {}^mE {}^fv_{12}}{{}^cE_1} \right) ({}^m\alpha - {}^f\alpha_1) (1 - {}^fv) {}^fv \quad (2.27) \end{aligned}$$

siendo ${}^f\alpha_1$, ${}^f\alpha_2$ y ${}^m\alpha$ los coeficientes de expansión por temperatura de los materiales constituyentes en las respectivas direcciones¹². El término cE_1 viene dado por la ecuación 2.10.

Finalmente, los coeficientes de expansión por humedad¹³ del compuesto ${}^c\beta_i$, considerando que la concentración de humedad en la fibra es nula [16], se obtiene:

$${}^c\beta_1 = \frac{{}^mE}{{}^cE_1} {}^m\beta \quad (2.28)$$

$${}^c\beta_2 = {}^m\beta - {}^fv {}^fv_{12} {}^c\beta_1 + {}^mv ({}^m\beta - {}^mv {}^c\beta_1) \quad (2.29)$$

donde ${}^m\beta$ es el coeficiente de expansión por humedad de la matriz.

Conviene destacar que los modelos micromecánicos presentados evalúan la interacción entre los materiales constituyentes proporcionando estimaciones de las propiedades efectivas. No obstante, hay que considerar las expresiones anteriores como aproximaciones basadas en la resistencia de materiales, cuyos resultados no necesariamente satisfacen las ecuaciones de la elástica. Asimismo, el requerimiento de ciertos parámetros experimentales puede limitar su aplicabilidad. Por lo general, es recomendable determinar las propiedades del compuesto mediante ensayos experimentales, y reservar los modelos micromecánicos para un análisis paramétrico o de sensibilidad [3].

2.4. Análisis en la mesoescala

En la microescala el material compuesto es claramente heterogéneo, pues se distinguen las diferentes fases, lo que implica que las propiedades pueden variar punto a punto. La mesoescala es un nivel de análisis intermedio en el que el tamaño del elemento estudiado es lo suficientemente grande respecto del diámetro de las fibras, como para que las propiedades de los materiales constituyentes sean promediadas y por consiguiente el material compuesto pueda ser tratado como homogéneo. Esta es una de las suposiciones más significativas en el estudio de los materiales compuestos, pues facilita el análisis permitiendo el tratamiento de problemas estructurales reales.

El análisis en la mesoescala suele hacer también referencia al estudio de la lámina. Una lámina de material compuesto es un elemento tipo placa cuyo espesor es varios órdenes de magnitud inferior que las otras dimensiones. Cuando las fibras del refuerzo están alineadas en una única dirección, se denomina lámina unidireccional. Las láminas desempeñan un rol fundamental en el análisis del comportamiento de las estructuras de *FRP* ya que, además de

¹²La formulación de la ecuación 2.27 incorpora la pertinente modificación para mantener la condición de isodeformación en los constituyentes en la dirección longitudinal, en una condición de carga transversal.

¹³Se define como $\beta_i \equiv \frac{\varepsilon_i^h}{\Delta h}$, siendo Δh el incremento en la concentración de humedad.

ser empleadas como producto final, constituyen la base para el cálculo de las propiedades de laminados de *FRP* multidireccionales utilizados en elementos estructurales [1].

2.4.1. Evaluación de la rigidez de la lámina

Dadas las características geométricas de la lámina, se asume un estado de tensión plana como el descrito anteriormente. La relación deformación-tensión para una lámina unidireccional se expresa

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

o en términos de la matriz de rigidez reducida

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

donde las componentes de las matrices de flexibilidad y rigidez se han sustituido por las correspondientes relaciones con las constantes elásticas de la lámina¹⁴, cuyos valores pueden estimarse a partir de las propiedades de los materiales constituyentes según las formulaciones presentadas en la sección anterior. Véase que para definir el comportamiento elástico de la lámina (en un estado de tensión plana) son necesarias 4 constantes elásticas.

Las láminas unidireccionales tienen sin embargo unas direcciones preferentes asociadas a la orientación de la fibra del refuerzo o a la simetría de los planos. Por ello es conveniente utilizar dos sistemas de coordenadas: uno para definir los ejes locales (1, 2, 12) cuya dirección primera coincide con la dirección de la fibra, y otro para definir los ejes globales (x, y, z) o ejes del material. En la Figura 2.3 se representan los dos sistemas, siendo θ el ángulo medido en sentido antihorario desde el eje global al eje local, que define la relación en el plano entre los dos sistemas de coordenadas ortogonales.

Cada orientación de lámina demanda un sistema de coordenadas local, siendo preciso referir la respuesta individual de cada lámina al sistema de coordenadas global o viceversa. Para la transformación de las componentes de tensión y deformación entre ambos sistemas de coordenadas, se emplean las siguientes matrices de transformación¹⁵ de funciones trigo-

¹⁴Se prescinde en adelante del superíndice c_\diamond por practicidad.

¹⁵Las matrices de transformación se presentan –en línea con lo anterior– para el caso particular de un estado de tensión plana. Para el caso general véase el segundo capítulo de la referencia [16]. La diferencia entre las matrices \mathbf{T}_σ y \mathbf{T}_ε viene dada por el uso de la deformación en notación ingenieril en vez de la notación tensorial.

2 | Fundamentos de la mecánica de los materiales compuestos

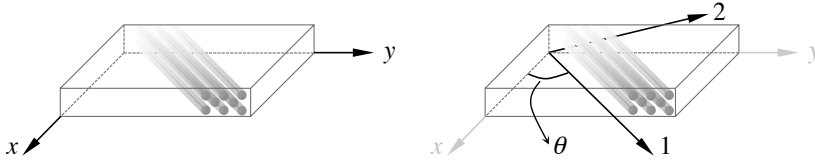


Figura 2.3: Definición del sistema de coordenadas global (izquierda) y local (derecha).

nométricas

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\sigma(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\sigma^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\sigma(-\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

donde

$$\mathbf{T}_\sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

y

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon(\theta) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon(-\theta) \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

donde

$$\mathbf{T}_\varepsilon(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

siendo $c = \cos \theta$ y $s = \sin \theta$. Las relaciones tensión-deformación conllevan sendas transformaciones:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\sigma^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T}_\varepsilon(\theta) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

y

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T}_\sigma(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

siendo las matrices $\bar{\mathbf{Q}}$ y $\bar{\mathbf{S}}$ las denominadas matrices reducidas transformadas (o no orientadas) de rigidez y flexibilidad, respectivamente, referenciadas ahora en ejes globales. La relación

entre las componentes de la matriz de flexibilidad en ejes locales y globales puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -c^2s^2 \\ 2c^3s & -2cs^3 & 2(c^3s - c^3s) & cs^3 - c^3s \\ 2cs^3 & -2c^3s & 2(c^3s - cs^3) & c^3s - cs^3 \\ 4c^2s^2 & 4c^2s^2 & -8c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{66} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Las componentes \bar{Q}_{ij} se obtienen a partir de una relación análoga a la anterior, o bien invirtiendo la correspondiente matriz de flexibilidad \bar{S} . Véase como tras la transformación entre ambos sistema de coordenadas, a diferencia de las relaciones deformación-tensión en el caso de la lámina orientada, aparece un acoplamiento entre las componentes normales y la de cortante, es decir: \bar{S}_{16} y \bar{S}_{26} , y consecuentemente \bar{Q}_{16} y \bar{Q}_{26} , son ahora términos no nulos. En otras palabras, una lamina orientada arbitrariamente exhibe una distorsión angular cuando es sometida a una tensión normal, y exhibe una elongación cuando se aplica un esfuerzo de cizalladura. Esta interacción, consecuencia de la naturaleza ortótropa de la lámina, es una de las diferencias más notables en comparación con los materiales isótropos.

Las propiedades elásticas de la lámina pueden también referenciarse en el sistema x - y de coordenadas globales. A partir del sentido físico de las componentes de la matriz de flexibilidad, la relación deformación-tensión para una lámina unidireccional referenciada en ejes globales puede reescribirse en términos de las constantes ingenieriles de la lámina no orientada, esto es:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,x}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{E_x} & \frac{\eta_{y,xy}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

cuya expresión es análoga a la ecuación 2.30, estando ahora las constantes ingenieriles definidas para una dirección arbitraria¹⁶.

Para cuantificar el señalado fenómeno de acoplamiento, se definen los denominados coeficientes de influencia mutua, entre los que se distinguen dos tipos: los coeficientes de influencia mutua de primer tipo $\eta_{i,ij}$, y los coeficientes de influencia mutua de segundo tipo $\eta_{ij,i}$. Ambos son definidos –en analogía al coeficiente de Poisson– como un ratio entre la deformación asociada respecto una deformación aplicada para un determinado estado de tensión¹⁷, y

¹⁶A pesar de los subíndices utilizados en la notación, la matriz de flexibilidad transformada sigue manteniendo la condición de simetría.

¹⁷Nótese que según la convención de notación, el primer subíndice denota la deformación o distorsión inducida, mientras que el segundo subíndice corresponde a la deformación o distorsión asociada a la tensión aplicada. El criterio es pues el inverso al utilizado en la definición del coeficiente de Poisson.

2 | Fundamentos de la mecánica de los materiales compuestos

son consecuencia directa de la orientación de la fibra del refuerzo. En particular, los coeficientes de primer tipo se definen como la relación entre la elongación y la distorsión angular resultado de la aplicación de un estado de tensión de cortante puro, esto es:

$$\eta_{x,xy} \equiv \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \quad \text{y} \quad \eta_{y,xy} \equiv \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}} \quad \text{si} \quad \tau_{xy} \neq 0 \text{ y } \sigma_x = \sigma_y = 0 \quad (2.40)$$

mientras que los coeficientes de segundo tipo se definen como la relación entre la distorsión angular y la elongación resultado de la aplicación de un esfuerzo normal uniaxial, esto es:

$$\eta_{xy,x} \equiv \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x} \quad \text{si} \quad \sigma_x \neq 0 \text{ y } \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{y} \quad \eta_{xy,y} \equiv \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y} \quad \text{si} \quad \sigma_y \neq 0 \text{ y } \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (2.41)$$

Las constantes ingenieriles de la lámina no orientada pueden determinarse directamente a partir de las constantes elásticas de la lámina y el ángulo de orientación, mediante las siguientes relaciones:

$$E_x = \frac{1}{\bar{S}_{11}} = \frac{E_1}{c^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)c^2s^2 + \frac{E_1}{E_2}s^4} \quad (2.42)$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{11}} = \frac{\nu_{12}(s^4 + c^4) - \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}\right)c^2s^2}{c^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)c^2s^2 + \frac{E_1}{E_2}s^4} \quad (2.43)$$

$$E_y = \frac{1}{\bar{S}_{22}} = \frac{E_2}{c^4 + \left(\frac{E_2}{G_{12}} - 2\nu_{21}\right)c^2s^2 + \frac{E_2}{E_1}s^4} \quad (2.44)$$

$$\nu_{yx} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{22}} = -\frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{22}} = \frac{\nu_{21}(s^4 + c^4) - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{E_2}{G_{12}}\right)c^2s^2}{c^4 + \left(\frac{E_2}{G_{12}} - 2\nu_{21}\right)c^2s^2 + \frac{E_2}{E_1}s^4} \quad (2.45)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{\bar{S}_{66}} = \frac{G_{12}}{c^4 + s^4 + 2\left(2\frac{G_{12}}{E_1}(1 + 2\nu_{12}) + 2\frac{G_{12}}{E_2} - 1\right)c^2s^2} \quad (2.46)$$

$$\eta_{x,xy} = \frac{\bar{S}_{16}}{\bar{S}_{66}} = \frac{sc \left[\left(2 + 2\nu_{12} - \frac{E_1}{G_{12}}\right)c^2 + \left(-2\nu_{12} - 2\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_1}{G_{12}}\right)s^2 \right]}{4c^2s^2 \left(1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2}\right) + (n^2 - m^2)^2 \frac{E_1}{G_{12}}} \quad (2.47)$$

$$\eta_{y,xy} = \frac{\bar{S}_{26}}{\bar{S}_{66}} = \frac{sc \left[\left(2 + 2\nu_{12} - \frac{E_1}{G_{12}}\right)s^2 + \left(-2\nu_{12} - 2\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_1}{G_{12}}\right)c^2 \right]}{4c^2s^2 \left(1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2}\right) + (n^2 - m^2)^2 \frac{E_1}{G_{12}}} \quad (2.48)$$

$$\eta_{xy,x} = \frac{\bar{S}_{16}}{\bar{S}_{11}} = \frac{sc \left[\left(2 + 2\nu_{12} - \frac{E_1}{G_{12}}\right)c^2 + \left(-2\nu_{12} - 2\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_1}{G_{12}}\right)s^2 \right]}{c^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)c^2s^2 + \frac{E_1}{E_2}s^4} \quad (2.49)$$

$$\eta_{xy,y} = \frac{\bar{S}_{26}}{\bar{S}_{22}} = \frac{sc \left[\left(2 + 2\nu_{12} - \frac{E_1}{G_{12}} \right) s^2 + \left(-2\nu_{12} - 2\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_1}{G_{12}} \right) c^2 \right]}{s^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{21} \right) c^2 s^2 + \frac{E_1}{E_2} c^4} \quad (2.50)$$

A pesar del número de componentes no nulas de la matriz de flexibilidad \bar{S} , y del número de constantes ingenieriles de la lamina no orientada, para definir el comportamiento elástico de la lámina (en un estado de tensión plana) siguen siendo necesarias 4 constantes elásticas, a lo que se añade el ángulo de orientación.

En el análisis de la respuesta mecánica de materiales fibrosos, en los que se asume un comportamiento de la lámina ortótropo y homogéneo, es instructivo estudiar la variación de las constantes ingenieriles en función de la orientación de la fibra. En la Figura 2.4 se han representado las curvas correspondientes a las expresiones 2.42-2.50, para el caso particular de una lámina unidireccional de fibra de vidrio y epoxi¹⁸ en función de la orientación de las fibras. En los gráficos representados, queda patente la alta dependencia de las constates elásticas de la lámina frente a la orientación del las fibras del refuerzo. De especial relevancia son los coeficientes de influencia mutua, presentando éstos valores nulos cuando la orientación coincide con los ejes de ortotropía (es decir 0° y 90°).

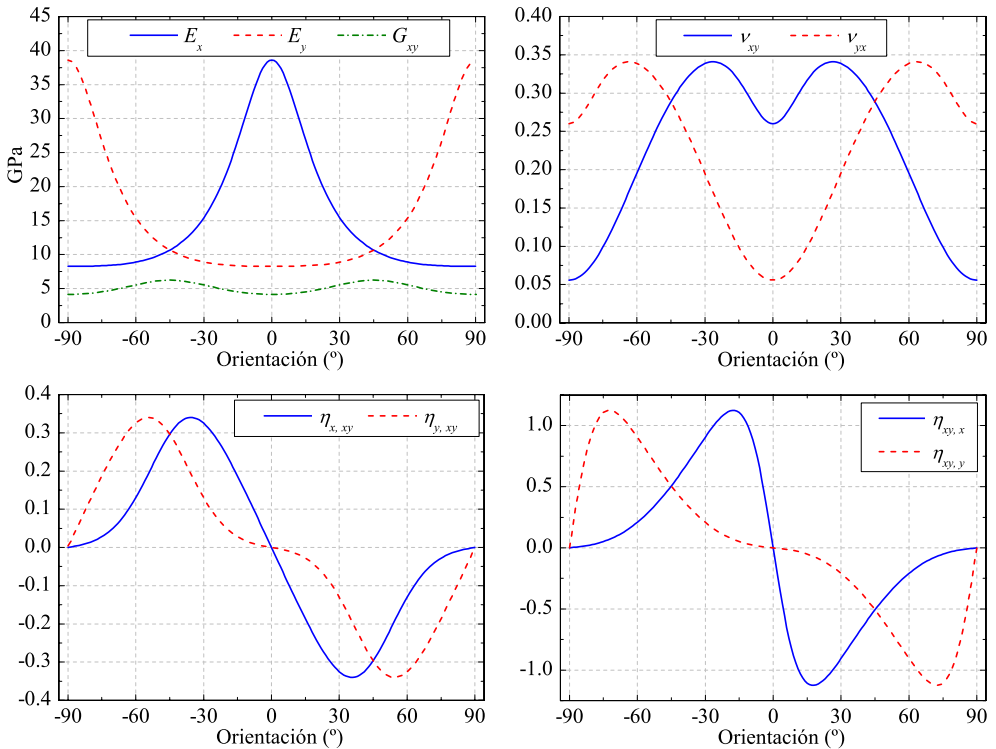


Figura 2.4: Variación de las constantes ingenieriles de una lamina de fibra de vidrio con matriz epóxica, en función de la orientación de las fibras.

¹⁸Propiedades de la lámina: $E_1 = 38,6$ GPa, $E_2 = 8,27$ GPa, $G_{12} = 4,14$ GPa y $\nu_{12} = 0.26$.

2.4.2. Efectos higrotérmicos en la lámina

En la sección anterior se evaluó a nivel micromecánico la afectación del material compuestos por efectos higrotérmicos. El análisis puede ahora generalizarse para una lámina orientada arbitrariamente. Para ello es básicamente necesario referenciar las deformaciones inducidas por la variación de la temperatura (ΔT) y del contenido de humedad (Δh) en el compuesto, en el sistema x - y de coordenadas globales. Asumiendo el principio de superposición higrotermoelástico, las deformaciones que experimenta la lámina se componen de las deformaciones ϵ_i^{mec} inducidas por las sollicitaciones mecánicas, y las deformaciones denominadas no mecánicas o de expansión libre ϵ_i^T y ϵ_i^h , inducidas por efectos térmicos e higroscópicos, respectivamente, esto es:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{mec} + \epsilon_x^T + \epsilon_x^h \\ \epsilon_y^{mec} + \epsilon_y^T + \epsilon_y^h \\ \gamma_{xy}^{mec} + \epsilon_{xy}^T + \epsilon_{xy}^h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{mec} + \alpha_x \Delta T + \beta_x \Delta h \\ \epsilon_y^{mec} + \alpha_y \Delta T + \beta_y \Delta h \\ \gamma_{xy}^{mec} + \alpha_{xy} \Delta T + \beta_{xy} \Delta h \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

donde los coeficientes higrotérmicos en ejes globales se obtienen mediante las matrices de transformación de funciones trigonométricas, es decir:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\epsilon^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c^2 \alpha_1 + s^2 \alpha_2 \\ s^2 \alpha_1 + c^2 \alpha_2 \\ 2cs(\alpha_1 - \alpha_2) \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\epsilon^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c^2 \beta_1 + s^2 \beta_2 \\ s^2 \beta_1 + c^2 \beta_2 \\ 2cs(\beta_1 - \beta_2) \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

siendo $c = \cos \theta$ y $s = \sin \theta$.

2.4.3. Evaluación de la resistencia de la lámina

Tras evaluar el comportamiento elástico de la lámina desde un punto de vista macroscópico, se aborda ahora el análisis de la resistencia de la lámina. El fallo de materiales laminados fibrosos es un problema complejo que sigue siendo fuente de interés y que promueve una intensa labor de investigación [19, 21, 24, 25]. Vista la preponderancia de una dirección de refuerzo, está claro que la resistencia de la lámina dependerá de una relación entre las cargas aplicadas y la dirección de las fibras. Por otro lado, dada la naturaleza heterogénea, este tipo de materiales exhiben una multiplicidad de modos de fallos locales antes de la rotura final, y es por ello por lo que la iniciación del daño no necesariamente coincide con la resistencia última.

Un paso previo a analizar el fenómeno de fallo y resistencia de la lámina, es entender los mecanismos intrínsecos de fallo a nivel micromecánico y su efecto en el comportamiento macroscópico último. En la Figura 2.5 se han representado esquemáticamente varios de los

mecanismos de fallo a nivel micromecánico en un *FRP*¹⁹ unidireccional sometido a un estado de tensión plana. En éste, el fallo puede sobrevenir principalmente por (a) la rotura a tracción de las fibras, (b) el micropandeo o el aplastamiento de las fibras a compresión, (c) el agrietamiento o (d) el aplastamiento de la matriz, el fallo en la interfase fibra-matriz, o por una combinación de varios de ellos. Esta multiplicidad de modos de fallo confiere unas propiedades anisótropas a la resistencia de la lámina. De manera análoga al análisis realizado para la rigidez, la resistencia de la lámina se caracteriza en base a unos parámetros de resistencia referenciados en los ejes principales del material, dando lugar a la definición de los denominados criterios de rotura.

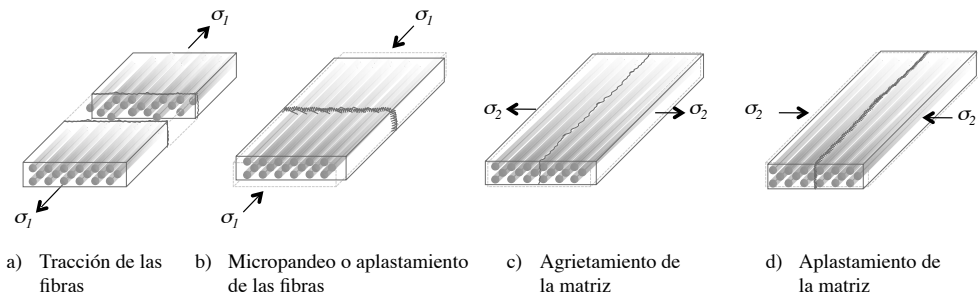


Figura 2.5: Representación esquemática de varios mecanismos de fallo a nivel micromecánico en un material compuesto reforzado unidireccionalmente sometido a un estado de tensión plana.

Las primeras propuestas de teorías y criterios de fallo aplicables a los materiales compuestos, se basaron en adaptaciones y generalizaciones de las teorías de fallo establecidas para los materiales homogéneos, atendiendo básicamente a la naturaleza anisótropa de las propiedades de rigidez y resistencia del compuesto²⁰. En la literatura se hallan documentados múltiples criterios de fallo, no obstante, a pesar de los avances, no existe un único criterio que prediga el fallo en todos los niveles de análisis, condiciones de carga o tipología de material. Varios de estos criterios tienen una base física, pero otros muchos son expresiones matemáticas que se ajustan a unos datos experimentales. Por ello es más prudente considerarlos indicadores que predictores. No obstante, al margen de las limitaciones inherentes, estas teorías y criterios son necesarios para establecer niveles de tensión de diseño.

En un primer nivel de aproximación destacan –por su simplicidad e inuitividad– las denominadas teorías de máxima tensión y máxima deformación. La primera considera que el fallo ocurre cuando –como mínimo– una de las componentes de tensión a lo largo de una de las direcciones principales del material, excede la respectiva resistencia límite en esa dirección²¹. Para un estado de tensión plana, la envolvente de fallo representa un paralelepípedo rectangular en el espacio de coordenadas $\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_{12}$. La teoría de máxima deformación es análoga,

¹⁹Dependiendo del espesor de la lámina, ésta, per se, podría no soportar las cargas a compresión, por eso se trata aquí un material que bien podría ser un laminado unidireccional, pero por practicidad se omite esta descripción por ser tratada en la siguiente sección.

²⁰Para abordar esta cuestión existe una alternativa que consiste en definir una transformación lineal entre un sólido real anisótropo y un sólido ficticio isótropo, utilizar entonces un criterio de fallo para un material isótropo, para retornar después al sólido real anisótropo mediante una transformación inversa [18].

²¹Así, por ejemplo, su aplicabilidad bajo un estado de tensión plana, requiere de tres subcriterios condicionales.

pero interviene el efecto de Poisson, por lo que para el mismo estado de tensión plana la envolvente de fallo toma la forma de un paralelepípedo oblicuo (véase Figura 2.6). Los parámetros de resistencia que definen los límites, se obtienen a partir de ensayos experimentales con materiales unidireccionales en condiciones de carga singulares, esto es: tracción unidireccional, compresión unidireccional y cortante puro. Su aplicabilidad ha sido demostrada en materiales en condiciones de carga a tracción con comportamientos predominantemente frágiles [13].

En un segundo nivel destaca –entre otros²²– el criterio Tsai-Wu [27, 28], de mayor aplicación en materiales con comportamientos dúctiles cuando las cargas a compresión o cizalladura son predominantes. La mayor divergencia, y por ende la característica principal de este criterio en comparación con los anteriores, es la consideración de la interacción entre las diferentes componentes de tensión. Dicho en otras palabras, este criterio aborda la estimación del fallo del material para combinaciones de carga más allá de los casos de sollicitaciones uniaxiales, condiciones en las que el estudio experimental es arduo y en ocasiones inviable.

El criterio Tsai-Wu se basa en un tensor polinomial de segundo orden que se representa mediante una superficie cerrada en el espacio de las tensiones [9]. Asumiendo que existe una función escalar del tipo

$$f(\sigma_i) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \text{para } (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.54)$$

siendo F_i y F_{ij} los tensores simétricos de resistencia, la condición de fallo se define para $f(\sigma_i) \geq 1$, y por consiguiente la condición de seguridad es $f(\sigma_i) < 1$. Haciendo uso de la notación ingenieril y particularizando la expresión para un estado de tensión plana, se obtiene la forma explícita de la expresión general:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \tau_{12} + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{12}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{16} \sigma_1 \tau_{12} + 2F_{26} \sigma_2 \tau_{12} \quad (2.55)$$

La expresión admite una simplificación reconociendo que $F_6 = F_{16} = F_{26} = 0$, dado que la resistencia a cizalladura es independiente del signo (en los ejes principales del material) [8], llegando a la expresión cuadrática y reducida del criterio de Tsai-Wu:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{12}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 \quad (2.56)$$

siendo el último el único término de interacción. Los parámetros de resistencia se expresan en términos de las resistencias del material (cuyos valores se determinan mediante ensayos experimentales uniaxiales), esto es:

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_1^T} + \frac{1}{\sigma_1^C}; \quad F_2 = \frac{1}{\sigma_2^T} + \frac{1}{\sigma_2^C}; \quad F_{11} = -\frac{1}{\sigma_1^T \sigma_1^C}; \quad F_{22} = -\frac{1}{\sigma_2^T \sigma_2^C}; \quad F_{66} = \left(\frac{1}{\tau_{12}^S}\right)^2 \quad (2.57)$$

donde los superíndices \diamond^T , \diamond^C y \diamond^S denotan tracción, compresión y cortante, respectivamente, en relación a las resistencias referenciadas en los ejes principales del material. Nótese

²²Como se adelantó, existen numerosos criterios de fallo con diferentes grados de sofisticación y niveles de predicción, cuya exposición, dado el carácter introductorio de este capítulo, queda fuera del alcance. Para una descripción ampliada, se emplaza al lector a la consulta de las referencias [10, 11, 19, 21, 25].

que resta por evaluar el parámetro F_{12} , cuya estimación, de abordarse experimentalmente, requiere necesariamente de un complejo ensayo de carga biaxial. Por ello se han propuesto varias aproximaciones para la estimación del parámetro de interacción. Una alternativa pasa por imponer la condición necesaria de que la ecuación represente un dominio cerrado, lo que equivale a suponer que la resistencia del material sea finita. Para ello debe cumplirse la relación

$$-\sqrt{F_{11}F_{22}} < F_{12} < \sqrt{F_{11}F_{22}} \quad (2.58)$$

o reescribiendo

$$F_{12} = f_{12}^* \sqrt{F_{11}F_{22}} = \frac{f_{12}^*}{\sqrt{\sigma_1^T \sigma_1^C} \sqrt{\sigma_2^T \sigma_2^C}} \quad (2.59)$$

siendo ahora la condición²³ $-1 < f_{12}^* < 1$. Para el caso particular de $f_{12}^* = -0,5$ se demuestra que el criterio se reduce al criterio de Von Mises [27]. Finalmente, reescribiendo los términos se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma_1^T} + \frac{1}{\sigma_1^C} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{\sigma_2^T} + \frac{1}{\sigma_2^C} \right) \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_1^T \sigma_1^C} \sigma_1^2 - \frac{1}{\sigma_2^T \sigma_2^C} \sigma_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_{12}^S} \right)^2 \tau_{12}^2 + \\ + 2 \frac{f_{12}^*}{\sqrt{\sigma_1^T \sigma_1^C} \sqrt{\sigma_2^T \sigma_2^C}} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \end{aligned} \quad (2.60)$$

que corresponde al lugar geométrico de la combinación de los estados de tensión límite en condiciones de tensión plana, cuya representación corresponde a un elipsoide en el espacio de coordenadas $\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_{12}$. Esta es, por tanto, una expresión matemática que describe la superficie de fluencia del material heterogéneo y anisótropo, basándose en el ajuste de una curva a partir de parámetros de resistencia experimentales.

En la Figura 2.6 se han representado las envolventes de fallo en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ correspondientes a las teorías de máxima tensión, máxima deformación y al criterio de Tsai-Wu, para la lámina unidireccional de fibra de vidrio y epoxi anteriormente considerada²⁴. En el caso del criterio de Tsai-Wu las curvas corresponden a secciones transversales del elipsoide para varios niveles de tensión de cortante.

Nótese que en la representación de las envolventes de fallo, cada dirección principal de resistencia representa una morfología de fallo diferente. El criterio Tsai-Wu, sin embargo, no permite distinguir el tipo de fallo ni cual es la fase (fibra o matriz) dominante en la fractura del material fuera de los ejes principales, y en consecuencia, tampoco contempla los fenómenos en la interfase entre la fibra y la matriz. Es por ello que dicho criterio ha sido en ocasiones censurado dada su base fenomenológica, no obstante, es dable señalar que se trata de un criterio matemáticamente consistente y operacionalmente simple, cuya aplicación está plenamente vigente.

²³La representación de la ecuación para los valores de $f_{12}^* = 1$ corresponde a dos planos paralelos y para $1 < f_{12}^* < -1$ a un hiperboloide.

²⁴Propiedades de la lámina: $\sigma_1^T = 1062$ MPa, $\sigma_1^C = 610$ MPa, $\sigma_2^T = 31$ MPa, $\sigma_2^C = 118$ MPa, $\tau_{12}^S = 72$ MPa y $f_{12}^* = -0,5$.

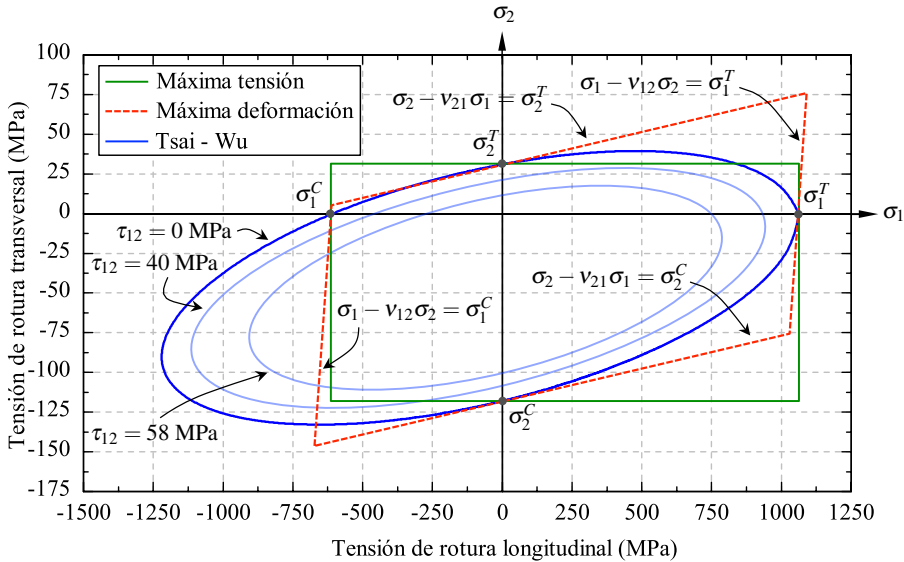


Figura 2.6: Envolturas de fallo en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ correspondientes a las teorías de máxima tensión, máxima deformación y al criterio de Tsai-Wu para varios niveles de tensión de cortante.

2.5. Análisis en la macroescala

La aplicabilidad estructural de una lámina de *FRP*, per se, es limitada. Por ello se recurre al proceso de laminación, que consiste en el apilamiento de sucesivas láminas con (aunque no necesariamente) diferentes orientaciones. Con este procedimiento se aumenta el espesor y por consiguiente la inercia de la sección, y permite minimizar el efecto inherente de la anisotropía en el plano, llegando a obtener –si se requiere– propiedades cuasi-isótropas, mejorando a la vez la rigidez transversal y el comportamiento a cizalladura. Con la laminación se pretende obtener, a partir de una combinación óptima de las diferentes láminas y orientaciones del material, un elemento estructural optimizado con unas características específicas que se ajusten a los requerimientos del diseño, pudiendo enfatizar o atenuar propiedades como la rigidez o la resistencia en unas direcciones determinadas. Ello introduce una nueva variable al problema denominada secuencia de apilado, abriéndose un enorme campo de posibilidades en la tarea del diseño. Consecuentemente, es de suma importancia entender la relación entre esta importante variable de diseño y la respuesta del laminado del que finalmente estará constituido el componente estructural.

En la Figura 2.7 se representa la sección transversal de un laminado idealmente plano, constituido por N láminas cuya dirección principal de refuerzo es paralela al plano del laminado, sometido a un estado general de cargas planas y de flexión. La secuencia de apilado se especifica mediante el ángulo de orientación θ de cada una de las láminas unidireccionales (i, j y k) respecto de la dirección x global del laminado, enumeradas en orden descendente, esto es: $[\theta_l^i / \theta_m^j / \dots / \theta_n^k]_R$, donde los subíndices l, m y n denotan el número de láminas y R el número de repeticiones del sublaminado.

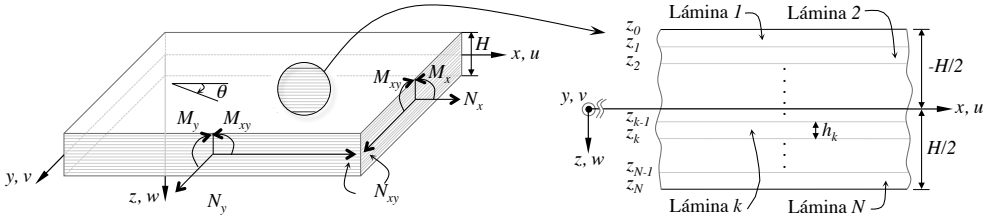


Figura 2.7: Esfuerzos y momentos resultantes actuando sobre un laminado (izquierda). Sección transversal y notación (derecha).

2.5.1. Evaluación de la rigidez del laminado

El análisis del comportamiento del laminado que se presenta a continuación, se basa en la teoría clásica de placas laminadas²⁵ y se formula a partir de las hipótesis de Kirchhoff [22, 23, 26], que consiste en asumir que las secciones planas ortogonales al plano medio de un laminado delgado, permanecen planas y ortogonales a la directriz después de la deformación (véase Figura 2.8), y que la placa no experimenta deformación en la dirección transversal a través del espesor²⁶, es decir $\epsilon_z = 0$.

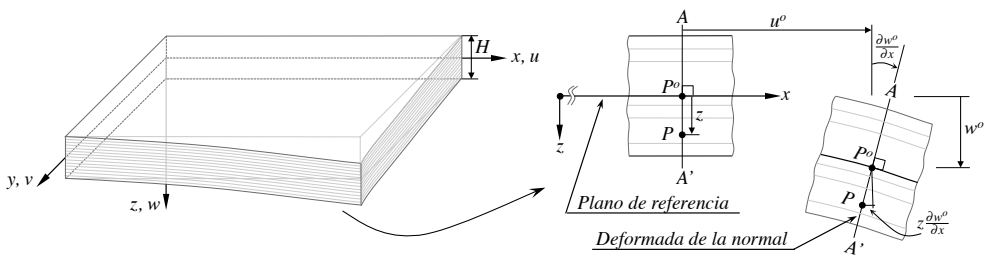


Figura 2.8: Esquemática de la deformación del plano medio de referencia según las hipótesis de Kirchhoff.

Estas consideraciones de carácter cinemático, permiten describir el campo de desplazamientos en términos de los desplazamientos y rotaciones de los puntos de un plano de referencia, por lo que se simplifica el análisis tridimensional del laminado al estudio de un dominio bidimensional, definido, generalmente, por el plano medio. Dicho lo cual, el desplazamiento de un punto arbitrario del laminado puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u^o(x, y) - z \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v^o(x, y) - z \frac{\partial w^o(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w^o(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.61}$$

²⁵La teoría clásica de placas laminadas se utiliza como una primera aproximación para describir las relaciones constitutivas de laminados delgados.

²⁶Se advierte de una inconsistencia entre esta segunda hipótesis ($\epsilon_z = 0$) y la condición de tensión plana en la que $\epsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y$ (véase ecuación 2.5). Ésta es una limitación inherente en las hipótesis de Kirchhoff que no se resuelve en el contexto de esta teoría clásica de placas.

2 | Fundamentos de la mecánica de los materiales compuestos

donde u , v y w son las componentes x - y - z del desplazamiento, el superíndice o denota el plano medio de referencia, y los términos $\frac{\partial w^o}{\partial x}$ y $\frac{\partial w^o}{\partial y}$ representan las rotaciones. Véase como los desplazamientos u y v varían linealmente con z , mientras que w es independiente. Asumiendo pequeñas deformaciones, las relaciones deformación-desplazamiento se expresan como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x,y,z) &\equiv \frac{\partial u^o(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^o(x,y)}{\partial x^2} = \varepsilon_x^o(x,y) + z\kappa_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y,z) &\equiv \frac{\partial v^o(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^o(x,y)}{\partial y^2} = \varepsilon_y^o(x,y) + z\kappa_y(x,y) \\ \gamma_{xy}(x,y,z) &\equiv \frac{\partial v^o(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u^o(x,y)}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w^o(x,y)}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^o(x,y) + z\kappa_{xy}(x,y)\end{aligned}\quad (2.62)$$

siendo κ la curvatura del laminado. En la teoría clásica de placas laminadas se adopta además la condición de tensión plana²⁷, de manera que la relación tensión-deformación particularizada para la lámina k -ésima ubicada a una distancia z_k del plano de referencia, se expresa como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o + z_k \kappa_x \\ \varepsilon_y^o + z_k \kappa_y \\ \gamma_{xy}^o + z_k \kappa_{xy} \end{Bmatrix}\quad (2.63)$$

De la observación de la expresión anterior se desprende que mientras la deformación varía continua y linealmente a través del espesor, las tensiones son discontinuas debido a que la matriz de rigidez reducida \bar{Q}_k es función de la orientación de la lámina k . A modo de ejemplo, la Figura 2.9 ilustra la variación de las tensiones a través del espesor de un laminado $[0/\pm 45/90]_S$ sometido a un estado de carga plana ($N_x > 0$) y de flexión ($M_x > 0$).

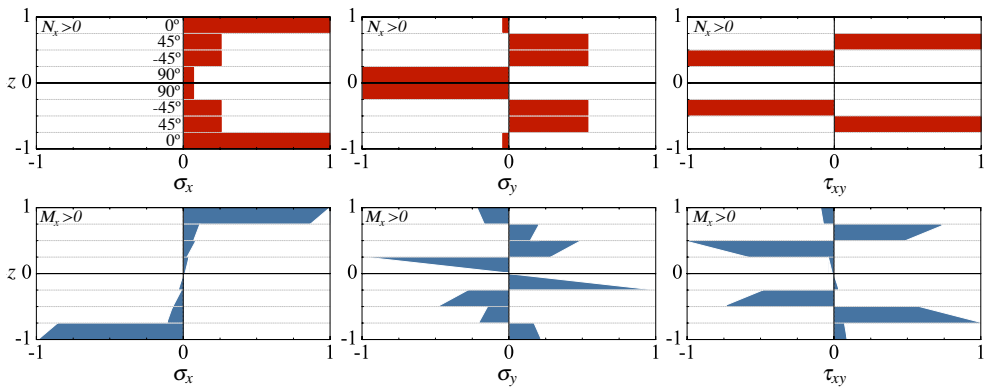


Figura 2.9: Variación de las tensiones a través del espesor de un laminado $[0/\pm 45/90]_S$ sometido a un estado de carga plana (superior) y de flexión (inferior).

Integrando el campo de tensiones a través del espesor H del laminado, se obtienen los esfuerzos resultantes que actúan en la sección del laminado:

²⁷Esto es: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

$$N_x \equiv \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x dz; \quad N_y \equiv \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y dz; \quad N_{xy} \equiv \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} dz \quad (2.64)$$

$$M_x \equiv \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x z dz; \quad M_y \equiv \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} \equiv \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.65)$$

siendo N_x , N_y , N_{xy} y M_x , M_y , M_{xy} las componentes de las fuerzas en el plano y momentos resultantes por unidad de longitud, respectivamente. Substituyendo las componentes de tensión por las correspondientes expresiones en términos de las deformaciones y curvaturas (ecuación 2.63), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{\mathbf{Q}} dz}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z \bar{\mathbf{Q}} dz}_{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left[\bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (2.66)$$

y

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z \bar{\mathbf{Q}} dz}_{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \underbrace{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 \bar{\mathbf{Q}} dz}_{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left[\bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + \bar{\mathbf{Q}}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \quad (2.67)$$

Al ser las componentes de deformación en el plano medio y la curvatura independientes de z , la integral sobre el espesor del laminado se reemplaza por el sumatorio de las contribuciones individuales de cada lámina, siendo h_k y h_{k-1} las coordenadas de la capa superior e inferior de cada lámina, y $h_k - h_{k-1}$ el espesor. Las indicaciones **A**, **B** y **D** en las expresiones anteriores corresponden a las denominadas matrices de rigidez del laminado. Éstas constituyen la base de la ecuación general de la teoría clásica de placas laminadas, en la que se relacionan las fuerzas en el plano y momentos resultantes por unidad de longitud, con la deformación y la curvatura del plano de referencia del laminado, esto es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

o en forma expandida

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

En concreto, **A** es la denominada matriz de rigidez plana, **B** la matriz de acoplamiento y **D** la matriz de rigidez a flexión²⁸. **ABD** son matrices simétricas cuyas componentes se

²⁸Nótese que las unidades de las matrices de rigidez **ABD** deben ser consistentes con la definición de las ecuaciones 2.68 y 2.69, es decir: **A** [N/m], **B** [N] y **D** [N·m].

determinan mediante las siguientes expresiones explícitas:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ijk} (h_k - h_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ijk} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ijk} (h_k^3 - h_{k-1}^3)
 \end{aligned}
 \tag{2.70}$$

En las matrices **ABD** se sintetizan las variables del diseño de laminados delgados, como son las propiedades del material de las láminas, la sección del laminado y la secuencia de apilado. Consecuentemente, su estudio es de importancia capital para el análisis del comportamiento de laminados multidireccionales. De especial relevancia es la secuencia de apilado por el rol fundamental que desempeña en relación al fenómeno de acoplamiento, como se describe a continuación.

Los laminados atienden a una clasificación según la disposición de las láminas y ésta tiene un efecto directo sobre el cómputo de las matrices **ABD**. Así, por ejemplo²⁹, en laminados simétricos (dícese de aquellos en los que se cumple $\bar{Q}_z = \bar{Q}_{-z}$) $B_{ij} = 0$; en laminados balanceados (aquellos que tienen el mismo número de láminas en las orientaciones $\pm\theta$) $A_{16} = A_{26} = 0$; en laminados ortótropos (aquellos cuyos planos de simetría coinciden con las direcciones principales del material) $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$; y en laminados cuasi-isótropos $A_{16} = A_{26} = 0$, $A_{11} = A_{22}$ y $A_{66} = (A_{11} - A_{12}) / 2$. El fenómeno de acoplamiento es consecuencia de la naturaleza ortótropa de las láminas, pero véase como mediante el proceso de laminación se puede extender la interacción a las componentes de membrana y flexión. En la Figura 2.10 se han esquematizado las relaciones entre los términos de acoplamiento A_{i6} , B_{ij} y D_{i6} , y las componentes de los esfuerzos, momentos, deformaciones y curvaturas.

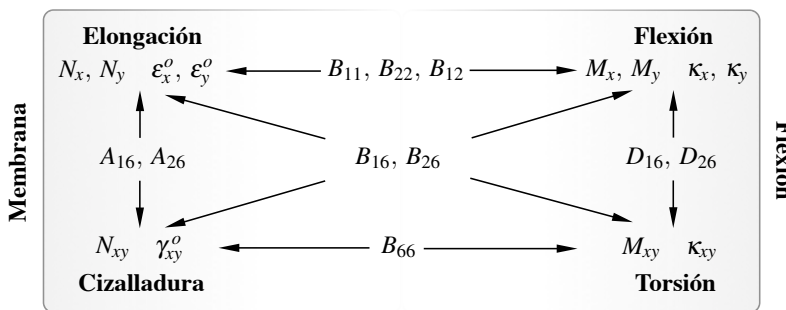


Figura 2.10: Relación entre los términos de acoplamiento y las componentes de los esfuerzos, momentos, deformaciones y curvaturas.

El acoplamiento es un fenómeno relativamente complejo que no tiene parangón en el mecánica de materiales isotrópicos convencionales, pero que no debe, sin embargo, considerarse

²⁹Para un análisis detallado de la casuística, consúltese el séptimo capítulo de la referencia [14].

como un aspecto limitativo o restrictivo. Para simplificar el análisis y minimizar los efectos de interacción, se recomienda, por lo general, el uso de laminados simétricos y balanceados. No obstante, un análisis pormenorizado demuestra que se trata de una variable atractiva que puede utilizarse, por citar un ejemplo, para el diseño de estructuras con curvatura anticlástica empleando laminados no simétrico.

En una primera aproximación, es habitual tratar al laminado constituido como un material homogéneo y ortótropo, que presenta un comportamiento elástico, el cual puede caracterizarse en base a las denominadas constantes ingenieriles efectivas o aparentes del laminado. Las expresiones para determinar las constantes elásticas aparentes del laminado se obtienen de manera análoga al procedimiento descrito para la lámina (véase ecuación 2.39 y sucesivas), a partir de las componentes de la matriz de flexibilidad. No obstante, son necesarias varias indicaciones. El estudio se centra generalmente en las constantes ingenieriles efectivas en el plano de laminados simétricos. Primeramente se define una tensión media $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ y $\bar{\tau}_{xy}$ en el plano del laminado, esta es

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{H} N_x \equiv \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x dz; \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{H} N_y \equiv \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y dz; \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{H} N_{xy} \equiv \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} dz \quad (2.71)$$

siendo H el espesor del laminado. Substituyendo el vector de tensión media en la ecuación de la relación constitutiva del laminado simétrico se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

donde \mathbf{A}^* es la denominada matriz de rigidez plana normalizada³⁰, siendo su inversa de la matriz de flexibilidad plana normalizada \mathbf{a}^* . A partir del sentido físico de las componentes de la matriz de flexibilidad, la relación deformación-tensión del laminado puede reescribirse en términos de las constantes ingenieriles efectivas del laminado, es decir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{16}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{26}^* \\ a_{16}^* & a_{26}^* & a_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{E}_x} & -\frac{\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{xy,x}}{\bar{G}_{xy}} \\ -\frac{\bar{\nu}_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{1}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{xy,y}}{\bar{G}_{xy}} \\ \frac{\bar{\eta}_{x,xy}}{\bar{E}_x} & \frac{\bar{\eta}_{y,xy}}{\bar{E}_y} & \frac{1}{\bar{G}_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

o en forma explícita

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \frac{1}{a_{11}^*}; & \bar{\nu}_{yx} &= -\frac{a_{12}^*}{a_{11}^*}; & \bar{E}_y &= \frac{1}{a_{22}^*}; & \bar{\nu}_{xy} &= -\frac{a_{12}^*}{a_{22}^*}; & \bar{G}_{xy} &= \frac{1}{a_{66}^*} \\ \bar{\eta}_{x,xy} &= \frac{a_{16}^*}{a_{66}^*}; & \bar{\eta}_{y,xy} &= \frac{a_{26}^*}{a_{66}^*}; & \bar{\eta}_{xy,x} &= \frac{a_{16}^*}{a_{11}^*}; & \bar{\eta}_{xy,y} &= \frac{a_{26}^*}{a_{22}^*} \end{aligned} \quad (2.74)$$

³⁰Véase la consistencia en las unidades de tensión de la relación constitutiva 2.72.

donde $\bar{\nu}$ denota la constante elástica efectiva en el plano³¹. En la Figura 2.11 se han representado las curvas correspondientes a la variación de las constantes elásticas efectivas \bar{E}_x , $\bar{\nu}_{yx}$, \bar{G}_{xy} y $\bar{\eta}_{xy,x}$ de 4 laminados de fibra de vidrio con matriz epóxica con diferentes secuencias de apilado, frente al ángulo de orientación³². En los gráficos se observa que en los laminados multiángulo se minimizan los factores de acoplamiento. No obstante, la rigidez específica en una de las direcciones se reduce a medida que se añaden láminas de material redundante en otras direcciones, mermándose así el rendimiento en pro de la isotropía.

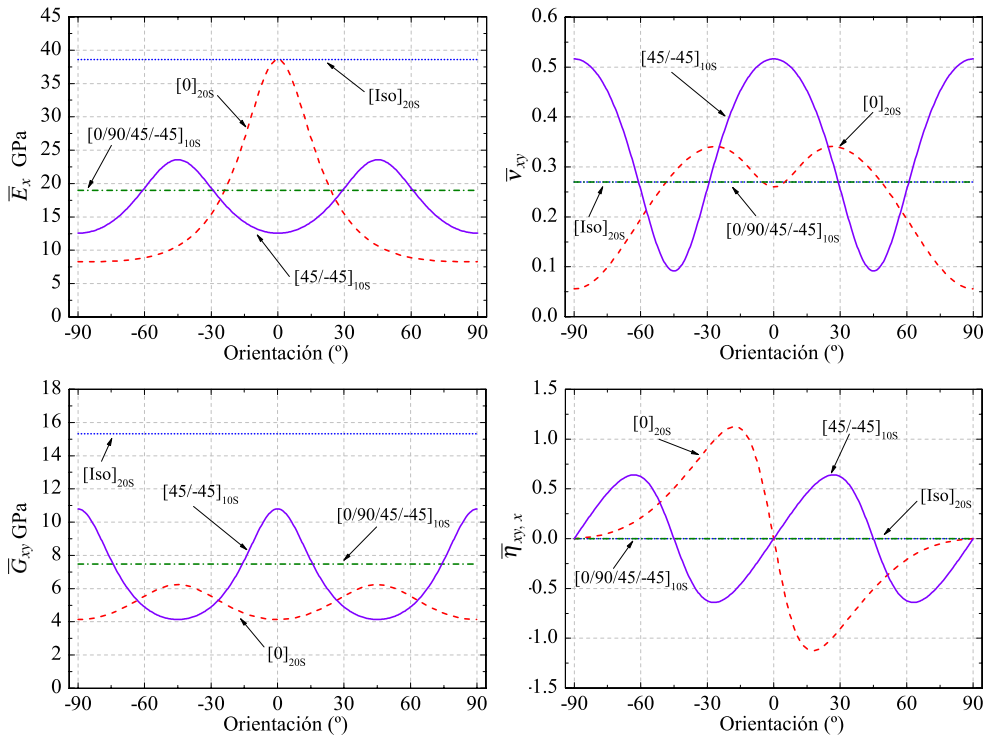


Figura 2.11: Variación de las constantes elásticas efectivas en el plano de 4 laminados de fibra de vidrio con matriz epóxica, en función de la orientación.

A pesar de que a menudo es conveniente disponer de unas constantes elásticas aparentes para, por ejemplo, llevar a cabo una comparativa directa de los módulos de rigidez con otros materiales, este procedimiento presenta notables restricciones, dado que la validez de las expresiones está limitada a laminados simétricos y se está asumiendo además un valor de tensión media [15]. Por ello es recomendable caracterizar el laminado en base a las matrices constitutivas **ABD**.

³¹Mediante un procedimiento análogo se pueden determinar las constantes ingenieriles efectivas asociadas a la flexión, en cuyo caso la normalización de la matriz de rigidez a flexión se obtiene a partir de $\mathbf{D}^* = \frac{12}{H^3} \mathbf{D}$, considerando una tensión máxima a flexión de $\frac{6}{H^2} \mathbf{M}$ [27].

³²En ocasiones, se da el caso de que el coeficiente de Poisson excede el valor unidad. Ello se debe al estado de tensión interno en las láminas individuales. El laminado tiene un comportamiento que se asemeja más al de una estructura, con unos mecanismos internos que lo diferencian de los materiales homogéneos que presentan un estado de tensión uniforme [8].

2.5.2. Efectos higrotérmicos en el laminado

En los procesos de fabricación y conformado de materiales compuestos laminados es habitual que el material esté sometido a ciclos térmicos para su curación [7, 17]. También durante su ciclo de vida, el laminado puede operar en un rango de condiciones higrotérmicas que pueden provocar efectos adversos en el rendimiento estructural. El análisis del fenómeno higrotérmico, como se vio en las secciones anteriores, puede abordarse desde un punto de vista micromecánico, a nivel de fibra y matriz, o a nivel macroscópico, considerando la lámina y el laminado como un material homogéneo. Sin embargo, el fenómeno cobra especial relevancia en el análisis de laminados.

En la sección anterior se han evaluado las deformaciones higrotérmicas que experimenta una lámina, las denominadas deformaciones de expansión libre. Cuando las láminas conforman un laminado con láminas apiladas en diferentes orientaciones, se crea una disparidad entre las deformaciones de expansión libre de las capas adyacentes debido a la anisotropía higrotérmica de las láminas, que tiene una clara afectación sobre las tensiones y que, por ende, es necesario cuantificar.

El desarrollo es paralelo al de la teoría clásica de placas laminadas, incorporándose ahora en las relaciones tensión-deformación las deformaciones no mecánicas inducidas por efectos higrotérmicos. Asumiendo una superposición higrotermoelástica de las deformaciones (ecuación 2.51), la relación constitutiva general del laminado en su forma matricial se reescribe como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{mec} \\ \mathbf{M}^{mec} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{0mec} \\ \boldsymbol{\kappa}^{mec} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{hT} \\ \boldsymbol{\kappa}^{hT} \end{Bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{0mec} \\ \boldsymbol{\kappa}^{mec} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{hT} \\ \mathbf{M}^{hT} \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

donde \mathbf{N}^{hT} y \mathbf{M}^{hT} representan los vectores de esfuerzos y momentos higrotérmicos resultantes por unidad de longitud, cuyas componentes se determinan mediante las siguientes expresiones explícitas:

$$\begin{Bmatrix} N_x^{hT} \\ N_y^{hT} \\ N_{xy}^{hT} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{\mathbf{Q}} \left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^h \end{Bmatrix} \right) dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{\mathbf{Q}} \left(\Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta h \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (2.76)$$

y

$$\begin{Bmatrix} M_x^{hT} \\ M_y^{hT} \\ M_{xy}^{hT} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{\mathbf{Q}} \left(\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^h \end{Bmatrix} \right) z dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \bar{\mathbf{Q}} \left(\Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta h \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} \right) z dz \quad (2.77)$$

La secuencia de apilado tiene también una importancia significativa en problemas con afectación higrotérmica, especialmente en laminados no simétricos ($\mathbf{B} \neq 0$) en los que las variaciones de temperatura y contenido de humedad provocan un alabeo del laminado.

2.5.3. Evaluación de la resistencia del laminado

La evaluación de la resistencia de laminados revierte en un problema de gran complejidad, debido a la multiplicidad de modos de fallo involucrados y a las diferentes escalas geométricas que intervienen en la iniciación y la progresión del daño³³.

La iniciación del daño en los laminados tiene su origen en la microescala y evoluciona gradualmente hacia el fallo global del laminado en la macroescala. Si bien los enfoques micromecánicos permiten predecir los modos de fallo locales, siendo este un aspecto fundamental para entender los mecanismos de iniciación, interacción y propagación del daño, su aplicabilidad para evaluar la capacidad resistente de laminados puede ser limitada e incluso inviable en problemas de cierta envergadura. Por ello, generalmente, los criterios y teorías de predicción de la resistencia de laminados centran la atención a nivel de la lamina, y se formulan en términos de la resistencia y la interacción entre las láminas. No obstante, el fallo de una lámina no necesariamente supone el fallo total del laminado, pero a nivel macroscópico puede considerarse como el inicio del proceso interactivo y progresivo de fallo.

La resistencia de un laminado es función de múltiples factores. Además de la resistencia fundamental de las láminas, intervienen parámetros como la rigidez, el espesor, la orientación, la secuencia de apilado, los coeficientes higrotérmicos e incluso el proceso de fabricación, debido a las posibles tensiones residuales inducidas durante el curado. Por ello, en la evaluación de la resistencia de laminados, debe considerarse tanto el estado tensional inducido por las sollicitaciones mecánicas, como el estado del propio laminado, que viene determinado por las tensiones residuales acumuladas y por las tensiones inducidas por las condiciones higrotérmicas de servicio del laminado.

En términos generales se distinguen tres análisis de fallo: la iniciación, la carga última y el fallo interlaminar. El primero se identifica como la rotura de la primera lámina. El segundo corresponde a la progresión del fallo multilaminar hasta alcanzar un nivel máximo de carga. El último, comúnmente denominado delaminación, es un modo de fallo propio de los laminados y consiste en la propagación entre capas adyacentes de una fisura en una región con alto contenido en resina, que provoca la separación de las láminas, incluso permaneciendo éstas intactas. La predicción del umbral de delaminación recibe una consideración especial, dado que se trata de un fenómeno inherentemente tridimensional y que, consecuentemente, no está contemplado en los análisis que asumen la condición de tensión plana. Habitualmente se definen criterios específicos para determinar el umbral de delaminación y evaluar su propagación [19].

El análisis basado en la carga última reporta información sobre de la capacidad portante residual del laminado, pero obviamente demanda un mayor detalle en la estimación de las condiciones de carga, la distribución de tensiones y la degradación progresiva del material, por lo que se acrecienta la dificultad de su aplicabilidad. El primer enfoque, basado en la rotura de primera lámina, consiste en evaluar el estado tensional en cada lámina y emplear un criterio de rotura –por ejemplo el criterio Tsai-Wu– para determinar su estado. Tras superar el umbral de rotura de la primera lámina, se inicia un proceso iterativo en el que se tiene en cuenta la acumulación de daño y la redistribución de esfuerzos en las láminas intactas.

³³La complejidad y la trascendencia del tema merece una exposición mucho más amplia de la que se presenta en esta sección con carácter meramente introductorio, para ello se emplaza al lector a la consulta de la referencia [25].

Si bien se trata de un enfoque ciertamente conservativo, es un método simple que goza de amplia aceptación porque proporciona una primera estimación para el diseño resistente de laminados.

2.6. Conclusiones

Con el presente capítulo se pretende ofrecer una visión general del comportamiento de los materiales compuestos, con un particular detenimiento en los compuestos laminados reforzados con fibras largas. Ciertamente, dada la inmensidad del tema tratado y la brevedad de este escrito, son muchos los aspectos que no se han abordado. Así, por ejemplo, la exposición se ha acotado al caso lineal y bidimensional, quedando excluido el análisis de secciones estructurales como vigas y perfiles de corte determinado. El énfasis se ha centrado pues en las particularidades del análisis del comportamiento de los compuestos laminados, en comparación con los materiales más convencionales.

Los aspectos fundamentales que determinan el comportamiento de los materiales compuestos son la no homogeneidad y la anisotropía. Éstos determinan la evaluación de la rigidez y la resistencia de los laminados. En este sentido, la evaluación de la rigidez se encuentra en una fase de madurez notablemente mayor que la evaluación de la resistencia. En concreto, en la formulación de los criterios de fallo, la anisotropía puede tenerse en cuenta mediante variables macromecánicas a través de las ecuaciones constitutivas, simplificando así el análisis. Sin embargo, la heterogeneidad no tiene un efecto directo en un nivel macroscópico, y, como es sabido, ésta juega un papel primordial en el fenómeno de fractura. Así, por ejemplo, los criterios polinomiales (como el criterio Tsai-Wu) no tienen en cuenta la naturaleza heterogénea del material compuesto, mientras que los criterios que sí contemplan los diferentes modos de fallo de los materiales constituyentes (como los criterios de máxima tensión o máxima deformación, entre otros), presentan limitaciones en cuanto la consideración de la interacción entre las diferentes componentes de tensión. Como corolario de lo anterior, existe una carencia de criterios de rotura y modelos de degradación que sean lo suficientemente próximos a la realidad física del fenómeno de fractura, a la vez que lo suficientemente simples como para ser aplicados de manera práctica y sencilla en las tareas de diseño estructural en ingeniería.

Conviene finalmente destacar que el estudio de la mecánica de los materiales compuestos es un campo consolidado en muchos aspectos, pero que todavía necesita de un periodo de desarrollo hasta alcanzar la plena madurez. A pesar de las dificultades que entraña su análisis, las ventajas estructurales que ofrecen son determinantes en multitud de aplicaciones. Prueba de ello es el incremento incesante en su uso durante las últimas cinco décadas en diversos sectores, entre los que destacan más recientemente la obra civil y la edificación.

2.7. Líneas futuras

El gran interés que suscita el uso de los compuestos como materiales estructurales en múltiples sectores industriales, ha promovido durante las últimas décadas una intensa labor

de investigación. No obstante, como se adelantó, todavía no se ha alcanzado una fase de plena madurez en todos sus ámbitos. Así, por ejemplo, las metodologías para la evaluación y modelización del fallo, y la estimación de la resistencia, son un tema de estudio plenamente vigente.

En relación a la simulación numérica del comportamiento mecánico, se está avanzando considerablemente en la modelización del fallo en condiciones mecánicas extremas, como por ejemplo las inducidas por impactos, con un particular detenimiento en el estudio del fallo interlaminar. Destacan también los nuevos desarrollos en las estrategias de modelización multiescala, que van indudablemente acompañados del incremento en capacidad de cómputo de los ordenadores. Gracias a esto último y unido a la mejora del rendimiento de las herramientas de simulación, se está avanzando significativamente en la modelización de estructuras completas de *FRP*. En el ámbito experimental hay que señalar, entre muchos otros, los avances en la estandarización de los ensayos de caracterización, los desarrollos de técnicas no destructivas avanzadas de caracterización mecánica y detección de daños interlaminares, y las investigaciones en el uso de sensores embebidos como las rejillas de Bragg en fibra óptica para la monitorización estructural. Otros campos de interés que se encuentran en pleno desarrollo son las metodologías de diseño y optimización, los nuevos procesos de fabricación con, por ejemplo, curaciones del laminado en varias etapas o incluso capa a capa, la exploración de nuevas vías para el reciclado, etcétera.

Se están investigando también nuevas aplicaciones, entre las que es pertinente destacar las correspondientes a la obra civil y la edificación, en las que se utiliza el *FRP* tanto como material de refuerzo como material de fabricación de elementos estructurales. Sin embargo, en varias aplicaciones (como el caso de los tejidos utilizados para el refuerzo, o las vigas híbridas) la falta de experiencia y la carencia de un marco normativo o de códigos de diseño, hacen generalmente necesaria la caracterización experimental del comportamiento de los elementos estructurales que son objeto de estudio.

Finalmente, tras el revolucionario redescubrimiento de los nanotubos de carbono (una forma alotrópica del carbono), se inicia una nueva etapa en el estudio de los materiales compuestos. Sus más que atractivas propiedades eléctricas, térmicas y mecánicas, abren un amplio abanico de aplicaciones multidisciplinarias, entre las que se encuentra la fabricación de materiales compuestos avanzados. Ello está suponiendo un nuevo enfoque y una necesaria expansión del análisis a la nanoescala.

Bibliografía seleccionada

En las últimas tres décadas se ha generado una amplia literatura sobre el tema en cada una de las áreas y campos de trabajo específicos.

Para una visión más amplia se recomienda consultar las siguientes referencias bibliográficas [14, 16]:

- HYER, M. W. *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. DEStech Publications, Inc, 2008.

- KOLLÁR, L. P., AND SPRINGER, G. S. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, 2003.

La primera es de carácter general, mientras que la segunda proporciona un estudio más avanzado incluyendo el análisis de secciones estructurales.

En el ámbito específico del diseño estructural con aplicaciones en la construcción, se recomienda lectura de la referencia [1]:

- BANK L.C., *Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.

Para profundizar en la caracterización experimental, además de la anterior, resulta de especial interés la referencia [12]:

- HODGKINSON J.M. (ED.) *Mechanical testing of advanced fibre composites*. Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2000.

En relación a la evaluación de la resistencia, se han publicado numerosas referencias que presentan comparativas entre las diferentes teorías y criterios de fallo, así como modelos de degradación del material. Entre ellas destacan [10, 19, 25]:

- HINTON, M., KADDOUR, A. AND SODEN, P. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58, 7 (1998), 1225 - 1254.
- ORIFICI, A., HERSZBERG, I. AND THOMSON, R. Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure. *Composite Structures*, 86, 1-3 (2008), 194 - 210.
- TALREJA, R. AND SINGH, C. V. *Damage and Failure of Composite Materials*. Cambridge University Press, 2012.

Finalmente, para abordar el tema de la modelización numérica de los materiales compuestos, se emplaza al lector a la lectura de las siguientes referencias bibliográficas [2, 18]:

- BARBERO, E. J. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. CRC Press, Taylor & Francis, Philadelphia, USA, 2008.
- OLLER, S. *Numerical Simulation of Mechanical Behavior of Composite Materials, (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences)*. Springer, 2014.

Referencias

- [1] BANK L.C. *Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.
- [2] BARBERO, E. J. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. CRC Press, Taylor & Francis, Philadelphia, USA, 2008.
- [3] CHRISTENSEN, R. A critical evaluation for a class of micromechanics models. *J. Mech. Phys. Solids* 38, 3 (1990), 379–404.

- [4] CHRISTENSEN, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Dover Publications, 2005.
- [5] CRISTESCU, N. D., CRACIUN, E.-M., AND SOÓS, E. *Mechanics of Elastic Composites*. Chapman and Hall / CRC, 2003.
- [6] DANIEL, I. M., AND ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, USA, 2005.
- [7] GAY, D., AND HOA, S. V. *Composite Materials: Design and Applications, Third Edition*. CRC Press, 2014.
- [8] HERAKOVICH, C. T. *Mechanics of Fibrous Composites*. Wiley, 1997.
- [9] HILL, R. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. *Proc. Royal Society of London, Series A* 193 (1948), 281–297.
- [10] HINTON, M., KADDOUR, A., AND SODEN, P. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates. *Composites Science and Technology* 58, 7 (1998), 1225 – 1254.
- [11] HINTON, M., AND SODEN, P. Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise. *Composites Science and Technology* 58, 7 (1998), 1001 – 1010.
- [12] HODGKINSON, J. *Mechanical Testing of Advanced Fibre Composites*. CRC Press, 2000.
- [13] HOFFMAN, O. The brittle strength of orthotropic materials. *Journal of Composite Materials* 1, 2 (1967), 200–206.
- [14] HYER, M. W. *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. DEStech Publications, Inc, 2008.
- [15] JONES, R. M. *Mechanics Of Composite Materials, Second Edition*. Taylor & Francis, Philadelphia, USA, 1999.
- [16] KOLLÁR, L. P., AND SPRINGER, G. S. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, 2003.
- [17] MALLICK, P. *Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design, Third Edition*. CRC Press, 2007.
- [18] OLLER, S. *Numerical Simulation of Mechanical Behavior of Composite Materials (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences)*. Springer, 2014.
- [19] ORIFICI, A., HERSZBERG, I., AND THOMSON, R. Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure. *Composite Structures* 86, 1-3 (2008), 194–210.
- [20] PETERS, S. T. *Handbook of Composites*. Springer, 1997.
- [21] PUCK, A., AND SCHÜRSMANN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology* 62, 12-13 (2002), 1633 – 1662.
- [22] REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*. CRC Press, 2003.
- [23] REDDY, J. N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition*. CRC Press, 2006.
- [24] TALREJA, R. Multi-scale modeling in damage mechanics of composite materials. *Journal of Materials Science* 41, 20 (2006), 6800–6812.
- [25] TALREJA, R., AND SINGH, C. V. *Damage and Failure of Composite Materials*. Cambridge University Press, 2012.
- [26] TIMOSHENKO, S. *Theory of Plates and Shells*. Mcgraw Hill Higher Education, 1964.
- [27] TSAI, S. W. *Theory of Composites Design*. Think Composites, 1992.
- [28] TSAI, S. W. *Strength & Life of Composites*. Aero & Astro, Stanford U, 2008.